



Received: 2022/08/26  
Revised: 2022/09/05  
Accepted: 2022/09/24  
Published: 2022/09/30

**\*Corresponding Author:**

**Yeong-Cheol Um**  
PGM Seeker R&D Lab, LIGNex1,  
207, Mabuk-ro, Giheung-gu, Yongin-si, Gyeonggi-do,  
Republic of Korea  
Tel: +82-31-326-9436  
E-mail: yeongcheol.um@lignex1.co.kr

# 외란에 강인한 모터 제어를 위한 이득 조절 요소가 포함된 슬라이딩 모드 설계 및 분석

## Design and Analysis of Sliding Mode with Gain-scaling Factor for Robust Control of Motor with External Disturbance

엄영철<sup>1\*</sup>, 김홍락<sup>2</sup>, 이석인<sup>3</sup>, 황선정<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LIG넥스원 PGM탐색기연구소 연구원

<sup>2</sup>LIG넥스원 PGM탐색기연구소 수석연구원

<sup>3</sup>LIG넥스원 PGM탐색기연구소 선임연구원

**Yeong-Cheol Um<sup>1\*</sup>, Hong-Rak Kim<sup>2</sup>, Sukin Lee<sup>3</sup>, Seon-Jeong Hwang<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Research Engineer, PGM Seeker R&D Lab, LIGNex1

<sup>2</sup>Chief Research Engineer, PGM Seeker R&D Lab, LIGNex1

<sup>3</sup>Senior Research Engineer, PGM Seeker R&D Lab, LIGNex1

### 1. 서론

항공기, 유도탄 등 움직이는 동체를 탐색하는 추적 레이다용 김발의 경우, 정확한 표적 탐색을 위해 외란 등에 강인한 제어기 설계가 수반되어야 한다[1]. 이를 위해 김발을 구동하는 모터에 대한 강인한 제어기 설계에 대한 연구가 필요하다.

장태호 등의 연구결과에서는 다양한 방식의 모터 모델링에 대해 PID 제어기를 설계하였으나, 실제 실험에서는 상대적으로 큰 오차가 발생하거나 발산하였다[2]. 양상원 등의 연구 결과에서는 모터 파라미터의 변동성에 강인한 슬라이딩 모드를 제안 및 분석하였으며, PI 제어기와의 비교를 통해 제안된 제어기의 우수성을 검증하였다[3]. 하지만 입력의 chattering 방지를 위해 입력에 사용된 부호함수를 연속함수로 대체하였지만 스위칭 되는 경계 내에서의 분석은 수행하지 않았다.

본 논문에서는 슬라이딩 모드의 단점인 chattering 감소를 위해 부호함수 대신 연속함수를 사용하였다. 이때 발생하는 스위칭 되는 경계 내부에서의 강인성 확보를 위해 이득 조절 요소를 추가한 슬라이딩 모드를 제안하였으며, 연속함수 사용으로 인해 스위칭되는 경계 내·외부에 대한 Lyapunov 안정성 분석을 수행하였다. 이를 통해 시스템의 허용한

### Abstract

본 논문에서는 추적 레이다용 김발을 구동하는 모터의 강인제어를 위해 이득 조절 요소가 포함된 슬라이딩 모드를 제안한다. 슬라이딩 모드의 단점인 chattering 감소를 위해 부호함수 대신 연속함수를 사용하였으며, 스위칭 되는 경계 내·외부에 대해 안정성 분석을 수행하였다. 이를 통해 시스템의 허용 한도 내에서 시스템 상태의 최종 수렴 범위를 능동적으로 조절할 수 있음을 보였다. 제안된 제어기의 성능은 MATLAB Simulink를 이용한 시뮬레이션을 통해 검증하였다.

In this paper, we propose a sliding mode with a gain-scaling factor for robust control of the motor for the gimbal of the tracking radar. Also, the signum function is changed to the saturation function in order to reduce the chattering, and we analyze of system stability inside and outside of the switching boundary. As a result, we show the ultimate bound can adjust in the allowed range of the system. With simulation results, the proposed controller is verified to the simulation by using MATLAB Simulink.

### Keywords

Robust Control(강인제어), Motor(모터), Gain-scaling Factor(이득 조절 요소), Sliding Mode(슬라이딩 모드)

### Acknowledgement

이 논문은 2022년도 한국해군과학기술학회 하계학술대회 발표 논문임.

도 내에서 시스템 상태의 최종 수렴 범위를 능동적으로 조절할 수 있음을 보였다. 제안된 제어기의 성능은 MATLAB Simulink를 이용한 시뮬레이션을 통해 검증하였다.

### 2. 수학적 모델링 및 상태방정식

DC 모터의 위치에 대한 동역학 방정식은 다음과 같다 [4].

$$T_e(t) = J_m \frac{dw(t)}{dt} + B_m w(t) + T_L(t) \tag{1}$$

여기서,  $T_e(t) = K_m i$ 는 모터의 토크,  $w(t)$ 는 모터의 각속도,  $T_L(t)$ 는 부하 토크,  $K_m, J_m, B_m$ 은 각각 모터 상수, 관성 모멘트, 모터의 마찰계수이다.

모터의 상태방정식 유도를 위해 위치와 속도 오차를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \theta_d - \theta \\ \xi_2 &= w_d - w \end{aligned} \tag{2}$$

여기서,  $\theta_d$ 는 추종하려는 위치,  $w_d = \dot{\theta}_d$ 는 추종하려는 속도를 나타낸다.

식 (1) - 식 (2)를 바탕으로 다음과 같은 상태방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \dot{w}_d + \frac{B_m}{J_m} w - \frac{K_m}{J_m} U + d(t) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서,  $U = i$ 는 제어 입력,  $d(t) = T_L(t)/J$ 는 외란으로  $d(t) < \bar{d}$ 와 같이 bound 되어 있다고 가정한다.

식 (3)은 다음과 같이 입력  $U$ 를 정의하면 궤환 선형화시킬 수 있으며, 이때 사용되는 제어 입력은 다음과 같다.

$$U = \frac{J_m}{K_m} \left( \dot{w}_d + \frac{B_m}{J_m} w + u_{smc} \right) \tag{4}$$

최종적으로 식 (4)를 식 (3)에 대입하여 정리되는 선형화된 오차에 대한 상태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= u_{smc} + d(t) \end{aligned} \tag{5}$$

### 3. 제어기 설계 및 분석

먼저, 슬라이딩 평면  $s$ 를 다음과 같이 설계한다.

$$s = \frac{k}{\gamma} \xi_1 + \xi_2 \tag{6}$$

여기서,  $k > 0$ 은 상태 오차에 대한 제어 이득이며,  $0 < \gamma \leq 1$ 은 이득 조절 요소이다.

제어 입력  $u$ 에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$u_{smc} = -\frac{\beta}{\gamma} \text{sat}\left(\frac{s}{\epsilon}\right) \tag{7}$$

여기서,  $\epsilon > 0$ 이며,  $\text{sat}(s/\epsilon)$ 는 다음과 같다.

$$\text{sat}\left(\frac{s}{\epsilon}\right) = \begin{cases} \text{sgn}(s), & \text{if } |s| > \epsilon \\ s/\epsilon, & \text{if } |s| \leq \epsilon \end{cases} \tag{8}$$

이때,  $|s| > \epsilon$ 인 영역을 reaching phase,  $|s| \leq \epsilon$ 인 영역을 boundary layer라고 하며[5], 식 (8)에 대한 그래프는 Fig. 1과 같다.

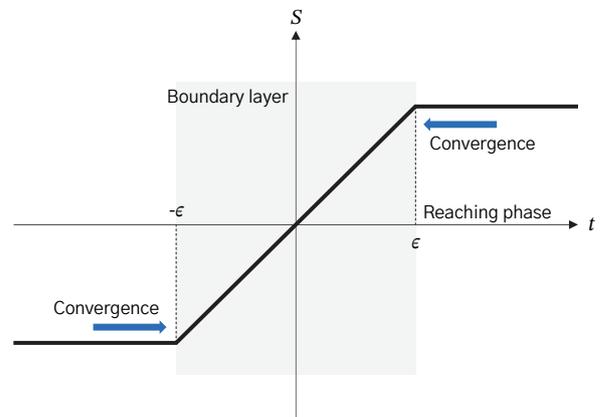


Fig. 1. Saturation function

#### 3.1 Reaching phase에서의 분석

먼저, Lyapunov 함수  $V(s) = \frac{1}{2}s^2$ 를 정의한 후, 이를 미분하면 다음과 같이 정리 가능하다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= ss \\ &= s \left\{ \frac{k}{\gamma} \xi_2 + u_{smc} + d(t) \right\} \end{aligned} \tag{9}$$

식 (7)의 제어 입력을 식 (9)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= s\dot{s} \\ &= s\left(\frac{k}{\gamma}\xi_2 - \frac{\beta}{\gamma}\text{sgn}(s) + d(t)\right) \\ &= -\frac{|s|}{\gamma}\left\{\frac{\beta}{2} - k|\xi_2|\right\} - |s|\left\{\frac{\beta}{2\gamma} - |d(t)|\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

식 (10)이  $\dot{V} \leq 0$ 을 만족하기 위해서는 다음과 같은 관계를 만족해야 한다.

$$\beta > 2\bar{d} \tag{11}$$

여기서 식 (11)의 관계를 만족하는  $\beta = \beta^*$ 을 정의하면,  $\xi_2$ 에 대해 다음과 같은 positively invariant set를 가지게 된다.

$$\Omega = \left\{|\xi_2| < \frac{\beta^*}{k}\right\} \tag{12}$$

식 (12)의 positively invariant set은  $k$ 의 조절을 통해 조절 가능하며, 여기서  $k = k^*$ 을 결정한다. 최종적으로 식 (11)을 만족하면 슬라이딩 평면  $s$ 는 유한한 시간에 boundary layer에 수렴하게 된다.

### 3.2 Boundary layer에서의 분석

식 (7)의 입력은 스위칭되는 경계 내에서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_{smc} &= -\frac{\beta^*}{\gamma\epsilon} s \\ &= -\frac{\beta^*}{\gamma\epsilon} \left(\frac{k^*}{\gamma}\xi_1 + \xi_2\right) \end{aligned} \tag{13}$$

식 (4)의 입력을 식 (5)의 상태방정식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 페루프 시스템을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{\beta^*k^*}{\gamma^2\epsilon}\xi_1 - \frac{\beta^*}{\gamma\epsilon}\xi_2 + d(t) \end{aligned} \tag{14}$$

식 (14)는 다음과 같은 행렬의 형태로 표현 가능하다.

$$\dot{\xi} = A_\gamma \xi + D(t) \tag{15}$$

여기서  $\xi = [\xi_1, \xi_2]^T, D(t) = [0, d(t)]^T, A_\gamma$ 는 다음과 같다.

$$A_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\beta^*k^*}{\gamma^2\epsilon} & -\frac{\beta^*}{\gamma\epsilon} \end{bmatrix} \tag{16}$$

행렬  $A$ 에 대해 다음과 같이 정의하면

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\beta^*k^*}{\epsilon} & -\frac{\beta^*}{\epsilon} \end{bmatrix} \tag{17}$$

행렬  $A$ 의 특성방정식은 다음과 같다.

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \frac{\beta^*}{\epsilon}\lambda + \frac{\beta^*k^*}{\epsilon} \tag{18}$$

이때, Routh-Hurwitz 판별법을 이용하면 식 (18)이 Hurwitz polynomial이 되기 위한 이득의 범위는 다음과 같다.

$$\beta^* > 0, \quad k^* > 0, \quad \epsilon > 0 \tag{19}$$

따라서 식 (19)를 만족하는  $\epsilon = \epsilon^*$ 를 선택하면 식 (18)은 Hurwitz polynomial이다.

$E_\gamma = \text{diag}[1, \gamma]$ 로 정의하면 행렬  $A$ 와 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$E_\gamma^{-1}AE_\gamma = \gamma A_\gamma \tag{20}$$

이때,  $A$ 가 Hurwitz이므로  $A^T P + PA = -I$ 의 Lyapunov 방정식을 만족한다. 따라서 식 (20)을  $A$ 에 대한 식으로 이항한 후, Lyapunov 방정식을 대입하면 다음과 같이 정리 가능하다.

$$A_\gamma^T P_\gamma + P_\gamma A = -\gamma^{-1}E_\gamma^2 \tag{21}$$

여기서,  $P_\gamma = E_\gamma P E_\gamma$ 이다.

Lyapunov 함수  $V(\xi) = \xi^T P_\gamma \xi$ 로 정의한 후, 이를 식 (15)의 궤적에 따라 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) &= \dot{\xi}^T P_\gamma \xi + \xi^T P_\gamma \dot{\xi} \\ &= \xi^T (A_\gamma^T P_\gamma + P_\gamma A_\gamma) \xi + 2\xi^T P_\gamma D(t) \\ &= -\gamma^{-1}(E_\gamma \xi)^T E_\gamma \xi + 2\xi^T P_\gamma D(t) \end{aligned} \tag{22}$$

식 (22)는 다음과 같은 부등식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) \leq & -\frac{1}{2}\gamma^{-1} \|E_\gamma \xi\|^2 \\ & -\frac{1}{2}\gamma^{-1} |E_\gamma \xi|^T |E_\gamma \xi| \\ & +2 |E_\gamma \xi|^T |P| |E_\gamma D(t)| \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)의 마지막 두 항을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\gamma |E_\gamma \xi|^T \{ |E_\gamma \xi| - |P| |E_\gamma D(t)| \} \\ & = -\frac{1}{2}\gamma |E_\gamma \xi|^T \left\{ \begin{bmatrix} |\xi_1| \\ \gamma |\xi_2| \end{bmatrix} - 4\gamma^2 \begin{bmatrix} |p_2| |d(t)| \\ |p_4| |d(t)| \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

식 (24)를 통해  $\xi_1, \xi_2$ 에 대한 최종 수렴 범위를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} UB(\xi_1) & := 4\gamma^2 |p_2| \bar{d} \\ UB(\xi_2) & := 4\gamma |p_4| \bar{d} \end{aligned} \quad (25)$$

따라서 시스템의 상태  $\xi_1, \xi_2$ 는 허용할 수 있는 시스템의 한도 내에서 이득 조절 요소  $\gamma$ 의 조절을 통해 최종 수렴 범위를 능동적으로 조절 가능하다.

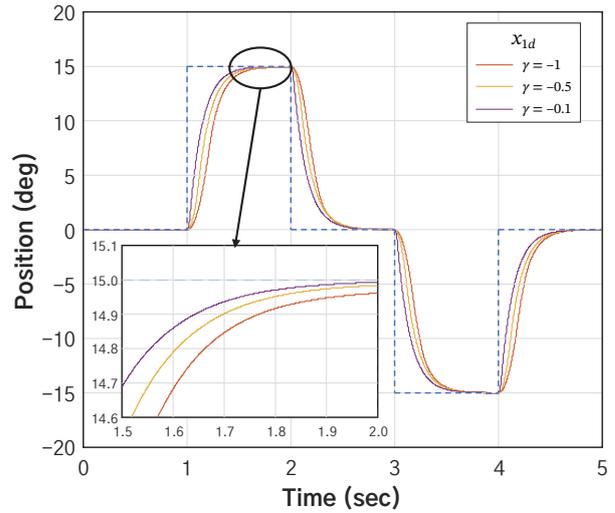
### 4. 시뮬레이션

이득 조절 요소  $\gamma$ 에 따른 제어기 성능 검증을 위해 MATLAB Simulink를 이용한 시뮬레이션을 진행하였다. 시뮬레이션에 사용된 파라미터는 Table 1과 같다.

**Table 1.** System parameters

Parameters	Value	Unit
$J_m$	5.8880	N·ms <sup>2</sup> /deg
$B_m$	$4.2460 \times 10^{-5}$	N·ms/deg
$K_m$	0.0234	N·ms <sup>2</sup> /A

불확실한 외란에 대해 이득 조절 요소  $\gamma$ 의 변화에 따른 모터의 위치를 비교한다. 먼저 부하 토크에 대해  $T_L(t) = 2 + 2.5\sin(t)$ 로 설정하면,  $|d(t)| \leq 0.7643$ 을 만족하므로 식 (11)의 관계를 만족하기 위해  $\beta = 4$ 로 결정한다. 또한 식 (19)의 관계를 만족하는  $k = 8, \epsilon = 0.5$ 로 결정한다. 이득 조절 요소  $\gamma$ 를 각각 1, 0.5, 0.1로 조절하며 시뮬레이션한 결과는 Fig. 2와 같다.



**Fig. 2.** Simulation result

Fig. 2를 통해 이득 조절 요소  $\gamma$ 를 감소시킴으로써 시스템의 상태가 최종적으로 수렴하는 범위가 줄어드는 것을 알 수 있다.

보다 수치적인 비교를 위해 이득 조절 요소  $\gamma$ 의 변화에 따른 mean square error(MSE)를 비교하며, MSE의 계산식은 다음과 같다.

$$MSE = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{t=0}^5 (x_{1d} - x_1)^2 \right\} \quad (26)$$

식 (26)을 통해 계산된 MSE는 Table 2와 같다.

**Table 2.** Numerical comparison

Variation of $\gamma$	Mean square error
$\gamma = 1$	10.8251
$\gamma = 0.5$	8.228
$\gamma = 0.1$	5.3465

Table 2를 통해 이득 조절 요소  $\gamma$ 를 1에서 0.1로 줄임으로써 MSE가 49.4%로 줄었다는 것을 알 수 있다.

### 5. 결론 및 향후 계획

본 논문에서는 외란에 대해 강인한 모터 제어를 위해 이득 조절 요소가 추가된 슬라이딩 모드 제어를 제안하였다. 또한 chattering 제거를 위해 입력의 부호함수를

연속함수로 대체하였으며, 스위칭 되는 경계 내·외부에서 Lyapunov함수를 이용한 안정성을 분석을 수행하였다. 제안된 제어기는 MATLAB Simulink를 이용한 시뮬레이션을 통해 시스템의 허용 한도 내에서 최종 수렴 범위를 능동적으로 조절 가능함을 검증하였다. 추후 본 연구를 바탕으로 불확실한 파라미터 및 측정 오차를 포함하는 모터 시스템에 대한 분석으로 확장시킬 예정이며, 실험을 통해 제안된 제어기의 성능을 검증할 예정이다.

## 참고문헌

- [1] Park, S.-J., Kang, H.-G., and Jin, S.-H., "Design a high speed position controller for 2-axis high speed gimbal using speed controller," Proceeding of the 2014 CICS Conference, 2014, pp. 202-204.
- [2] Jang, T.-H., Kim, Y. S., and Kim, H.-T., "Comparison of PID controllers for linear and nonlinear motor system models," Proceeding of the 2015 ICROS Conference, 2015, pp. 361-362.
- [3] Yang, S.-W., Jeong, T.-Y., and Jeong, S.-K., "Robust DC motor speed control based on a sliding mode with an optimum switching surface," Journal of Power System Engineering, Vol. 24, No. 4, 2020, pp. 17-25.
- [4] Son, Y.-D., Kim, H.-J., and Kim, J.-M., "Position control algorithm using acceleration compensation to improve response of P-PI serial controller," Journal of the Korean Institute of Illuminating and Electrical Installation Engineers, Vol. 34, No. 2, 2020, pp. 40-45.
- [5] Khalil, N. K, Nonlinear systems 9th edition, First Book, 2010.