



Received: 2023/06/20
Revised: 2023/07/05
Accepted: 2023/08/04
Published: 2023/09/30

***Corresponding Author:**

Sera Kim

Dept. of Natural Science, Republic of Korea Naval Academy
1 Jungwon-ro, Jinhae-gu, Changwon-si,
Gyungangnam-do, 51704, Republic of Korea
Tel: +82-55-907-5234
E-mail: srkim85@gmail.com

파이썬과 MOY Graph를 이용한 항적 분석방법

On an Analysis Method for Ship Wakes with Python and MOY Graphs

김세라*

해군사관학교 기초과학과 조교수

Sera Kim*

Assistant professor, Dept. of Natural Science, ROK Naval Academy

Abstract

이 논문은 선박의 해양 위의 궤적인 ship wake 형태를 매듭론으로 분석하는 새로운 방법을 제시하였다. 첫 번째로 주어진 이미지 분석을 위해 파이썬을 이용하여 필요한 이미지를 가공한 코딩을 정립하였다. 주어진 코딩을 이용하여 ship wake의 형태를 더욱 또렷하고 분명하게 볼 수 있게 변형시킨다. 두 번째로 변형된 이미지에서 매듭 형태의 정보를 추출하는 과정을 설명하였다. 이 과정을 통하여 최종적으로 매듭 정보인 braid form을 얻을 수 있었다. 즉, 선박의 ship wake를 매듭 정보로 변화시키는 것이 가능함을 보였으며 이를 이용하여 매듭론에서 설명하는 불변량들 중 braid group의 braid word를 이용하여 분류하는 방법을 설명한다.

This study proposes a new method for analyzing images of ship wakes as knots. At first, I established the Python-based coding to get information from an image of a ship wake. The given coding in this manuscript is used to process the image of the ship wake and make it more distinct from other parts. Secondly, I explained the process of extracting mathematical information from the image. The information referred to the braid form was successfully obtained from the image of the ship wake. Consequently, I demonstrated to represent the image as the braid word in the braid group and how to analyzing the braid word by using invariants in knot theory.

Keywords

함선의 항적(Ship Wake), 이미지 처리(Image Processing), MOY 그래프(MOY Graph), 브레이드 형태(Braid Form), 브레이드 군(Braid Group)

Acknowledgement

본 연구는 교육부와 한국연구재단의 지역대학 우수과학자지원사업의 지원을 받아 수행된 연구 결과이다(과제번호: 2021R111A3045371, 과제명: 다양한 매듭 카테고리들 사이의 임베딩들과 그 응용에 대하여).

이 논문은 2023년도 한국해군과학기술학회 하계학술대회 발표 논문임.

1. 서론

선박이 움직인 수면 위 흔적을 ship wake라 하며 이를 구별하기 위한 파동의 밀도 및 형태를 분석하는 방법들이 존재한다. 이 논문에서는 ship wake에서 보이는 다양한 파형 이미지에 변환을 가하는 새로운 방법을 제안한다. 이 과정을 통해 ship wake를 기하학적 대상인 매듭 그래프(MOY graph)로 변환 가능하게 한다. 이를 설명하기 위하여 Python과 Medibang Paint 프로그램을 이용해 주어진 이미지에서 불필요한 에러 부분을 제거한 뒤 필요한 객체의 정보를 분리하고 이것으로 수학적으로 계산 가능한 MOY 그래프를 추출하는 과정을 소개한다. 또한 그 결과에 대한 braid form 변환 후 braid group의 원소로 변형한 수학적 해석법을 제시한다.

2. Ship wake의 정의 및 예시

선박이 수면 위를 이동할 때 물이 선박의 선수부와 부딪히며 만들어진 압력으로 생성되어 배의 후미로 뿜어나가는 bow wave와 후미의 꼬리와 부딪히거나 스크루에 만들어지는 stern wave가 만들어진다. 이 두 가지 파동들이 합쳐지며 수면 위에 그려지는 ship wake는 각각의 배의 특성과 해수면의 상황에 따라 일정한 패턴을 가지게 된다. 이 패턴을 분석하는 방법으로서 일반적으로 main stream을 축으로 하여 side stream의 angle을 계산하거나, 일식과 같은 특수한 상황을 가정하여 이 특수성이 만들어내는 ship wake 등을 분석하는 연구 결과[1]가 소개되고 있다. 하지만 ship wake에서 발생하는 회전 및 모양을 기하학적으로 분석한 연구는 거의 없는 상황이다.

따라서 이 논문에서는 ship wake 파형의 모양 정보를 기하학적인 정보인 매듭 형태로 표현하여 분석하는 새로운 방법을 연구하였다. 이 방법을 소개하기 위하여 적절한 ship wake 사진을 예시로 하여 필요한 수학적 정보를 추출하는 과정을 설명하고자 한다. 이를 위하여 잘 알려진 무료 이미지 사이트인 <https://unsplash.com>에서 확인 가능한 ship wake 사진 중 하나인 Fig. 1을 선택하였다[2]. 특히, Fig. 1에서 가운데 위치한 ship wake의 파형을 매듭 형태로 추출하고자 한다.

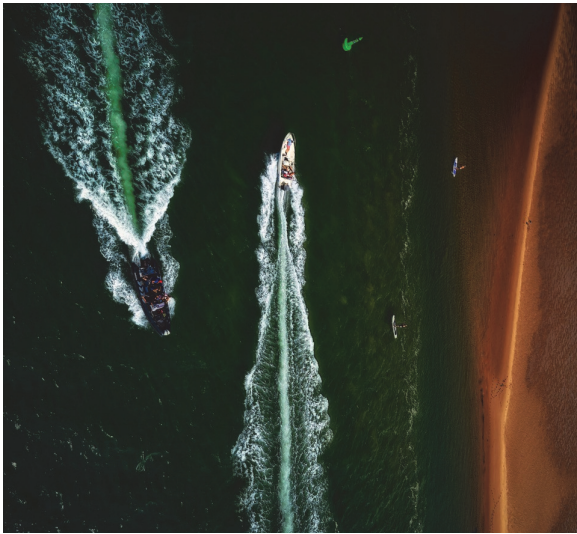


Fig. 1. Ship wake[2]

3. Ship wake의 이미지 분석 및 매듭 형태 확인

3.1 Python을 이용한 ship wake 이미지 윤곽 작업

우선 주어진 ship wake의 main stream과 side stream에서 보이는 이미지의 테두리 정보를 강화할 필요가 있었으며, Python을 이용하여 이미지의 엣지 정보를 강조하는 방법으로 image processing 과정을 진행하였다. 또한 ship wake의 파고 정보를 강화하기 위하여 해당 이미지를 흑백영상으로 변환하는 코딩을 작성하였다.

이를 위하여 저자가 Python에서 coding 과정에서 이용한 명령어들을 간단히 소개하면 다음과 같다. 우선 Python에서 다차원 배열과 행렬 연산에 효율적인 기능을 제공하는 핵심 라이브러리인 NumPy 라이브러리를 이용하였다. 또한 matplotlib.pyplot 모듈과

matplotlib.image 모듈을 사용하였다. 이 중에서 첫 번째 모듈은 데이터 시각화를 위한 Python 라이브러리로서 여기서는 그래프를 그리기 위하여 사용되며, 두 번째 모듈은 이미지 파일을 읽고 표시하는 기능을 제공한다.

그 다음 사용한 핵심 코드는 from skimage.feature import canny이다. 이 코드는 scikit-image 라이브러리의 skimage.feature 모듈에서 canny 함수를 이용하며, canny 함수는 테두리 검출 알고리즘 중 하나인 Canny 알고리즘을 구현한 함수이다. 즉, 이미지에서 대상 객체의 윤곽을 찾는 작업을 수행하였다. 실제 저자가 작성한 코드 내용은 다음과 같다.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.image as mpimg
from skimage.feature import canny
from skimage.color import rgb2gray
from PIL import Image

image_path = "/content/5.jpg"
image = mpimg.imread(image_path)

gray_image = np.dot(image[..., :3], [0.2989, 0.5870, 0.1140])

edges = canny(gray_image, sigma=2.0)

fig, ax = plt.subplots()
ax.imshow(image)
ax.imshow(edges, cmap='gray', alpha=0.5)

plt.show()

combined_image = np.where(edges[..., None], 0, image)

result_path = "5_canny.jpg"

result_image =
Image.fromarray(np.uint8(combined_image))
result_image.save(result_path)

pix1 = 255 - combined_image
result_path_reversed = "5_canny_reversed.jpg"

result_image_reversed =
Image.fromarray(np.uint8(pix1))
result_image_reversed.save(result_path_reversed)

plt.imshow(pix1, cmap="gray")
plt.show()
```

이 코딩을 이용하여 Fig. 1에서의 사진 정보를 테두리를 강조한 흑백 이미지로 편집한 후 음영을 반전하여 Fig. 2와 같은 결과를 만들어냈다.

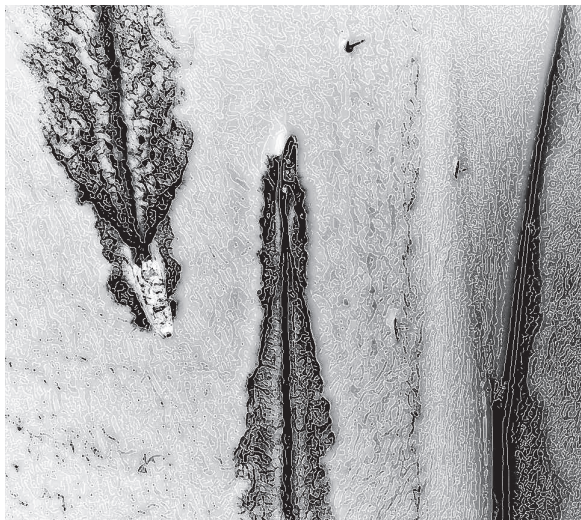


Fig. 2. The image from Python

여기서 다른 ship wake 및 주변 파도 정보 등이 없는 관측 대상인 ship wake의 순수한 이미지를 추출하기 위하여 Fig. 2를 그림 편집 프로그램인 메디방 페인트 (Medibang Paint) 프로그램으로 불러와 이미지를 매듭 형태로 표현하기 위한 추가 작업을 진행하였다.

3.2 Medibang Paint program을 이용한 ship wake 이미지 추출 작업

Fig. 2의 이미지에서 대비를 200% 늘려 출력한 뒤, 강조된 테두리 정보를 바탕으로 ship wake의 파고가 높은 영역의 정보를 빨간색 이미지 Fig. 3로 얻어낸다.

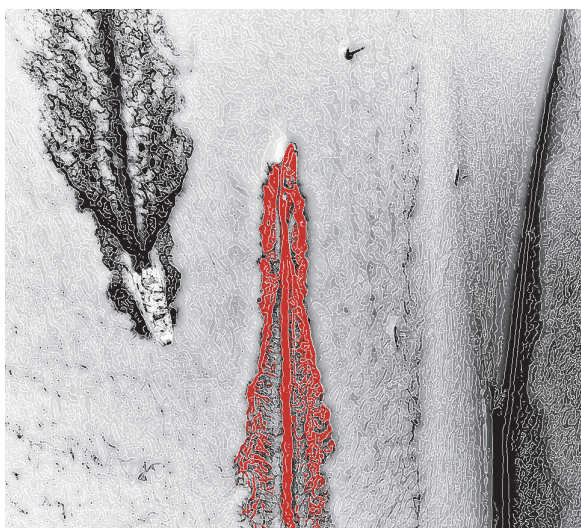


Fig. 3. Extracting required image

Fig. 3에서는 필요한 ship wake에서 발견되는 회전력이 선명하게 보이는 효과를 주어 각 위치의 꼬임 방향을 확인할 수 있었다. 또한 파고의 곡선 이미지가 뚜렷하게 보여 매듭과 같은 선 정보를 얻을 수 있게 한다. 즉, 이 빨간색 이미지에서 보이는 점 이미지를 근방의 점들의 위치를 기준으로 늘린 타원으로 형상화시킨 뒤의 이미지를 곡선형(curve)으로 연결시키면 최종적으로 Fig. 5의 두 번째 이미지를 얻을 수 있게 된다. 이 이미지는 선이 꼬인 형태인 매듭으로 정의하기에는 어려운 부분이 있다. 이유는 Y 형태처럼 세 개 이상의 선이 함께 만나는 부분이 존재하기 때문이다. 이렇게 매듭과 같이 곡선의 꼬인 모양과 여러 선들의 교차점이 함께 있는 대상을 매듭론에서는 MOY graph(Murakami-Ohtsuki-Yamada graph)라 정의하고 있다[3]. 아래 Fig. 4에서 보이는 것처럼 여러 개의 선이 합쳐지거나 늘어날 수 있으며 각 곡선에 번호가 매겨져 가중치를 부여하는 형태의 그래프이다. 현재 ship wake의 흐름을 표현하는 각각의 선들 역시 동등한 입장이 아닌 해류의 강약 정도를 표현하기 위해 일반적인 매듭이 아닌 MOY-graph로 표현하도록 채택하였다.

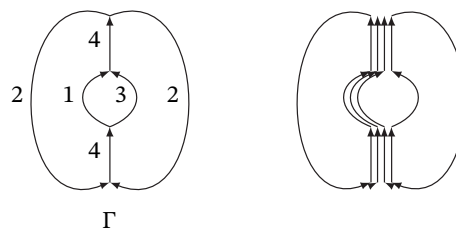


Fig. 4. The example of the MOY-graph[3]

이 MOY graph에서 특별히 main stream을 표현하는 라인은 하늘색으로 표기하였고 실질적으로 2줄의 정보를 가지는 라인은 주황색으로 표기하여 Fig. 5의 제일 오른쪽 이미지를 얻을 수 있었다.

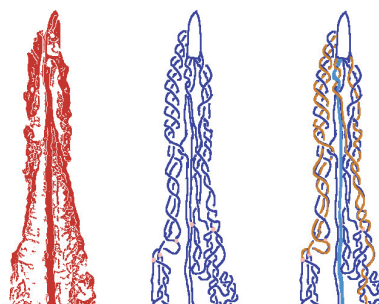


Fig. 5. The image from MediBang Paint

이 ship wake 매듭의 경우 특별히 아래쪽 꼭선들이 다시 맺어지지 않고 열려있게(끊겨있게) 되며 이를 저자는 long MOY graph라고 명명하겠다. 이와 같은 과정을 통하여 ship wake를 매듭이라는 위상수학에서 다루는 수학적 대상으로 옮기는 새로운 과정을 소개하였다. 이제 이 대상을 매듭론의 이론들을 이용하여 어떻게 분류 가능한지 확인해 보도록 한다.

4. Ship wake로 얻어진 매듭의 수학적 분석 결과

매듭론에서 단순한 형태 부분을 제외하고 꼬임이 있는 부분을 표기한 것을 braid form이라 부르고 braid form으로 표기된 매듭들은 특수한 대수적 구조를 가지는 braid group의 원소들로 하나하나 대응 가능하다.

대수적 원소로 정의하는 방법은 다음과 같다. 우선 하나의 braid form에서 각 라인의 왼쪽부터 오른쪽까지 순서대로 번호를 매긴다. 그 뒤 두 i 번째 라인과 $i+1$ 번째 라인 사이에 오른손 방향의 회전이 있을 시 σ_i 를 부여하고, 왼손 방향 회전 시 σ_i^{-1} 의 generator를 부여하며 주어진 braid form을 위에서 아래로 내려오며 긴 braid form을 하나의 단어 형태로 압축하여 표기하는 방법으로 대수적 대상으로 표기한다.

이렇게 표기된 단어(word)들의 집합에 제한조건 두 가지를 걸어 group을 정의하게 된다. 첫 번째 조건은 매듭의 기본 움직임 중 하나인 Reidemeister move 3에 해당하는 relation $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ 및 두 번째 조건인 멀리 떨어진 부분의 높낮이를 조절하는 움직임에 해당하는 relation $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i (|i - j| > 2)$ 으로 제한되는 group representation을 가지는 group이다. 일반적으로 이를 braid group으로 부른다[4].

앞의 Fig. 5의 마지막 이미지에서 주어져 있는 전체 long MOY graph로 표현된 ship wake 매듭에서 주어진 배의 크기 5배수 이내의 거리 안의 매듭 정보에서 배 이미지를 제거한 braid form으로 변형하여 표현하면 Fig. 6와 같다.

이제 braid form을 braid group의 원소 형태로 표현할 수 있게 되며 그 결과는 다음과 같다.

$$(\sigma_1 \sigma_2)^9 \sigma_4^4 \sigma_5 (\sigma_8 \sigma_7)^{-3} \sigma_7 \sigma_8^{-4} \sigma_3^2 \sigma_6 \sigma_7 \sigma_8 \sigma_1^{-1} \sigma_2 (\sigma_1 \sigma_2)^3 \sigma_6^2 \sigma_8^4 \quad (1)$$

위 braid group의 원소로 표기를 할 때의 최대 장점은 이 대수적 정보를 바탕으로 기하 정보를 손실 없이

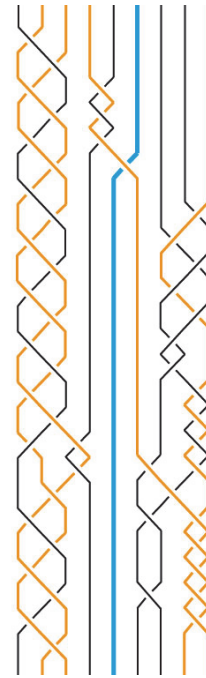


Fig. 6. The braid form from the MOY graph

보존할 수 있다는 것이다. 위 식 (1)을 분석해 보자면 σ_1 과 σ_2 로 구성된 stream, σ_4, σ_5 로 구성된 main stream, σ_7, σ_8 으로 구성된 stream이며,中间的 σ_3, σ_6 와 같이 stream 사이의 간섭 역시 식 (1)을 통해 파악할 수 있다. 이를 통해 주어진 braid form에 3개 stream의 존재 및 3번의 stream 사이의 간섭이 있음을 파악할 수 있다. 또한 main stream 부분은 회전이 거의 보이지 않으며 왼쪽 stream의 오른손 방향의 회전력에 관여하는 generator의 수(주어진 단어 안에서 26개 등장)가 오른쪽 stream에서 볼 수 있는 왼손 방향 회전력에 관여하는 generator의 수(주어진 단어 안에서 17개 등장)에 비하여 압도적으로 많음을 쉽게 파악할 수 있다. 즉, 왼쪽 stream에 회전력이 많이 가해지는 ship wake를 가지는 상황임을 파악 가능하다. 추가로 이 중 주어진 long MOY graph의 특징인 다중선에 대한 정보를 추가하면 main stream만을 위한 불변량을 고려할 수 있을 것이라 기대한다.

5. 결론

본 논문은 선박이 수면에 남기는 ship wake를 분석하기 위해 수학적 대상 중 하나인 long MOY graph로 변환하는 방법에 대하여 연구하였으며 그 결과는 다음과 같다.

- (1) 원하는 ship wake 이미지를 경계선을 강조한 타입으로 변경 가능한 image processing 프로그램을 제작하였다(Python으로 코드 작성).
- (2) (1)단계에서 추출한 정보를 매듭 정보로 구현하는 과정을 통해 필요한 ship wake를 매듭 형태로 구현하는데 성공하였다.
- (3) 구현된 long MOY graph를 braid form으로 해석하여 주어진 기하정보를 압축하여 표현할 수 있는 braid group의 원소인 단어(word) 형태로 표현하였으며 이를 통해 주어진 ship wake의 분석법을 소개하였다.

참고문헌

- [1] J. Y. Liu, Y. Y. Sun, Y. Kakinami, C. H. Chen, C. H. Lin, H. F. Tsai, "Bow and stern waves triggered by the Moon's shadow boat," *Geophysical Research Letters*, Vol. 38, No. 17, 2011.
- [2] Unsplash (<https://unsplash.com/ko/%EC%82%AC%EC%A7%84/RYKP86Hiq1Q>)
- [3] Robert, Louis-Hadrien, "A new way to evaluate MOY graphs," 10.48550/arXiv.1512.02370, 2015. Dec.
- [4] Birman, Joan S. "Braids, links, and mapping class groups," *Annals of Mathematics Studies*, Vol. 82, 1974.