Journal of the KNST

2023; Vol.6, No.4; pp. 376-379

ISSN: 2635-4926

https://doi.org/10.31818/JKNST.2023.12.6.4.376

Check for updates

Received: 2023/11/17
Revised: 2023/11/25
Accepted: 2023/12/08
Published: 2023/12/31

선박항적이 가지는 특수 군에 대한 연구

A Research for Special Group from Ship-wake Images

김세라*

해군사관학교 기초과학과 조교수

Sera Kim*

Assistant professor, Dept. of Natural Science, ROK Naval Academy

*Corresponding Author:

Sera Kim

Dept. of Natural Science, Republic of Korea Naval Academy
1 Jungwon-ro, Jinhae-gu, Changwon-si, Gyungsangnam-do, 51704, Republic of Korea

Tel: +82-55-907-5234

E-mail: srkim85@gmail.com

Abstract

이 논문은 항적의 형태를 매듭론의 브레이드 단어로 표현했을 때의 특징을 이용하여 항적-브레이드 단어를 설명하는 특정한 군(群)을 소개하고자 한다. 일반적인 군표현과는 다른 세 가지 생성원의 형태 및 관계성을 정의하고 실제 항적표현에 어떻게 사용되는지 설명한다.

This paper aims to introduce a specific group that describes the ship wake as a braid word in knot theory in order to utilize the characteristics when expressing the form of a ship wake. I define three different types of generators and those relationships for the braid group which is different from braid group presentations. And I explain how they are applied to the actual representation of ship wakes.

Keywords

함선의 항적(Ship Wake),
브레이드 단어(Braid word),
항적-군(Ship Wake-group),
군표현(Group Presentation)

Acknowledgement

본 연구는 교육부와 한국연구재단의 지역대학 우수과학자지원사업의 지원을 받아 수행된 연구 결과이다(과제번호: 2021R1I1A3045371, 과제명: 다양한 매듭 카테고리들 사이의 임베딩들과 그 응용에 대하여).

1. 서론

선박이 움직인 수면 위 흔적인 항적이 가지는 모양은 배의 모양에 의해서 만들어지는 측면 파동(bow wave)과 동력원에 의해서 만들어지는 주 파동(stern wave)로 분류된다. 이전 연구에서 항적이 가지는 이미지를 MOY graph를 이용한 표현으로 변환하는 방법을 기술하였다면 이 논문에서는 주어진 MOY graph에서 필요한 부분을 브레이드 단어로 바꾸었을 때, 그 단어들이 이루는 특별한 군(群)을 설명하고자 한다. 또한 이 군이 가지는 군 표현을 정의함으로써 다양한 항적을 설명하고자 한다.

2. 유체 위 궤적 분석 방법

유체 위 움직이는 질점을 분석할 때 유체의 움직임과 물체의 움직임 두 가지를 고려하게 된다. 유체 상태에 따른 움직임의 궤적을 분석하는 방법의 경우 Boyland et al.이 위상기하학을 분석하여 만든 이론인 Thurston-Nielsen theory를 이용하는 방법이 있다.[1] 바로 배치(batch)라는 원형 공간 속 2차원 단면과 시간 축 1차원을 추가하여 점성이 있는 유체 위에서 2차원 평면 위 각 교반기들의 흔들림(stirring)을 감지하는 방법이며, 이때 매듭론의 해석법을 이용하여 분석하게 된다.

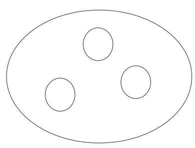

Fig. 1. 배치와 교반기(내부의 작은 원들)

주어진 stirring protocol에 따라 교반기가 움직이면서 만들어지는 궤적을 추적 및 관찰하여야 한다. 이를 위해 유체 상의 2차원 면 위에 그려진 잉크선의 변화를 관찰하게 된다. 그 예시는 아래의 Fig. 2처럼 시간의 흐름에 따라 나타난다.

Fig. 2. Stirring protocol에 따른 변화 예시[1]

Fig. 2는 두 가지 움직임의 상황을 시간의 흐름에 따라 나열한 것이며, 이 슬라이드들을 시간축(3차원의 수직축)으로 두고 나열하게 되면 교반기의 움직임은 매듭론의 브레이드 군(braid group)의 원소 형태로 표현된다. 이것이 시간축을 수직으로 두고 유체의 움직임을 파악하는 것이라면 항적의 경로는 수면 위에서 선박이 시간의 흐름에 따라 움직이는 평면적인 궤적을 분석하게 된다. 하지만 유체의 움직임을 궤적 매 순간의 수직에 대해서 관찰하게 된다면 동일하게 브레이드 군의 원소 형태로 확인할 수 있게 될 것이다. 특히 항적의 경우 Fig. 3에서 보이듯이 세 개의 긴 궤적을 남기게 된다. 우선 선박이 이동할 때 선박의 선수부가 물을 밀어내면서 만들어지는 측면 파동은 배의 양면에서 생성되어 배의 후미로 뻗어나가는 두 개로 갈라지며 뻗어나가는 긴 파동을 만들어 낸다. 반면 배의 동력원에 의하여 만들어지는 주 파동은 두 가닥의 측면파동 가운데를 가르는 파동이다. 이 두 가지 형태의 파동들을 통틀어 선박 항적이라 부르며, 이는 배의 모양과 수면의 상태에 따라 다양한 형태를 가진다.

Fig. 3. 선박 항적(ship wake) [2]

저자의 이전 연구에서는 선박 항적의 이미지를 MOY graph로 변환 뒤 브레이드 단어를 이용하여 표현하는 방법을 제안하였다[3]. 각각의 단어들은 측면파동을 표현하는 부분과 주 파동을 분석하는 단어들로 나뉘었다. 이 성질을 확장하여 선박항적을 대표하는 단어들을 포함하는 군을 확인하고, 그 군이 가지는 군 표현에 대하여 정의해 보고자 한다. 특히 이 논문에서는 군 표현으로 나오는 형태를 기존의 매듭이론에서 다루는 군 표현과 비교하고, 이 표현을 이용하여 대수적으로 구별 가능한 선박 항적들의 예시를 검토할 것이다.

3. 선박 항적의 단어 표현과 군 표현

3.1 선박 항적 이미지가 가지는 단어

앞서 설명한 바와 같이 항적은 단어의 형태를 갖는다.

예를 들면 논문[3]에서 나온 예인 Fig. 4와 같이 주어진 선박 항적의 측면 파동과 관련된 꼬임과 주 파동에서 보이는 꼬임을 분류해서 파악할 수 있다.

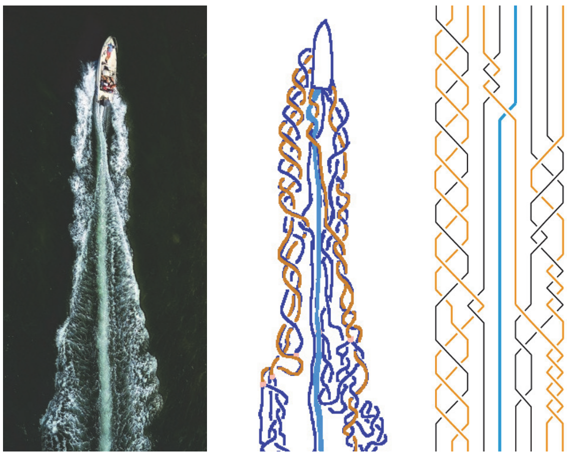

Fig. 4. 항적, 관련 매듭 이미지변환, 브레이드 형태[3]

여기에서 발견되는 브레이드 단어는 측면 파동과 주 파동을 대표하는 생성원들을 파악할 수 있게 하고, 각 파동의 세기와 움직임 그리고 그 사이의 간섭을 계산할 수 있도록 만든다. 이런 선박 항적들의 이미지가 만들어 내는 단어를 만드는 방법에 대해서 다시 정리하면 다음과 같다.

주어진 꼬임의 이미지를 브레이드 군의 원소(단어)로 정의하는 방법은 다음과 같다. 우선 하나의 선형 꼬임에서 등장하는 라인들에 왼쪽에서 오른쪽으로 순서대로 번호를 부여한다. 예컨대 총 n개의 선이 존재할 때 임의의 i번째 라인과 i+1번째 라인 사이에 오른손 방향의 180° 회전을 고려해 보자. 이 움직임에 σ_i라는 생성원을 부여하고, 왼손 180°방향 회전 시 σ_i^{-1}의 생성원을 부여한다. 주어진 꼬임은 위에서 아래로 내려오며 각 수평선에 한 번의 꼬임이 대응하도록 꼬임들의 높낮이를 조절하자. 하나의 단어 형태로 압축하여 표기하는 방법을 통해 대수적 대상으로 표기한다. 이렇게 생성원들이 모여서 표기된 단어들의 집합에 매듭의 움직임에 따라 동일한 매듭으로 인지하게 하기 위한 제한조건 두 가지를 걸어 군을 정의하게 된다. 브레이드의 경우 선형형태의 모양을 유지하는 움직임만을 다루게 된다. 따라서 매듭의 동형을 유지해 주는 세 가지 Reidemeister move 중에서 브레이드에 적용 가능한 유일한 움직임인 세 번째 Reidemeister move에 해당하는 연관성인 $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ 및 브레이드의 분리된 부분의 높낮이를 조절하는 움직임에 해당하는 relation $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i(|\, i - j \,| > 2)$으로 제한되는 두 개의 조건을 가지는 군 표현을 가지는 군이다. 일반적으로 이런 선 형태의 매듭들을 표현하는 단어들이 모여있는 군을 브레이드 군이라고 부른다[4].

3.2 항적 이미지에 대응하는 단어들이 만드는 군

앞서 설명한 바와 같이 선박의 항적은 세 가닥의 긴 파동(좌우 측면파동 및 주 파동)을 만들어 낸다. 즉 하나의 파동을 만들어 내기 위한 선을 3n개라고 할 때, 각각의 파동을 표현하기 위해서는 n개의 선을 배정하면 될 것이다. 일반적으로 선박 항적에 나타나는 각각의 파동을 B_3 브레이드 군의 원소로 표현한다면 전체 항적(측면 파동 및 주 파동)을 표현하기 위해 B_9의 브레이드 군이 필요하게 될 것이다. 이때 왼편 측면 파동의 생성원을 a_1, a_2로, 주 파동의 생성원을 b_1, b_2로, 그리고 우편 측면 파동을 c_1, c_2로 분류한다. 또한 왼편 측면 파동 및 주 파동의 간섭을 t_1으로 우편 측면 파동 및 주 파동의 간섭을 t_2로 표기한다. 그 경우 연결원은 다음과 같이 나타나게 된다.

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \ (\sigma = a, b, c)\\
&a_2t_1a_2 = t_1a_2t_1\\
&t_1b_1t_1 = b_1t_1b_1\\
&b_2t_2b_2 = t_2b_2t_2\\
&c_1t_2c_1 = t_2c_1t_2\\
&t_1t_2 = t_2t_1\\
&a_1t_1 = a_1a_1\\
&b_2t_1 = t_1b_2\\
&c_lt_1 = t_1c_k \ (k = 1,2)\\
&a_it_2 = t_2a_i\\
&b_1t_2 = t_2b_1\\
&c_2t_2 = t_2c_2 \ (i = 1,2)\\
&a_ib_j = b_ja_i \ (i, j = 1,2)\\
&c_ib_j = b_jc_i \ (i, j = 1,2)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

이 연결원들을 보면 a_1, b_1, c_1의 생성원들로 구성된 부분군이 교환군이 된다는 사실을 파악하게 된다. 이 생성원과 연결원을 군 표현으로 가지는 B_9의 부분군을 S_9으로 표기하자. 이렇듯 각 파동의 생성원을 분류

하는 S_9에서는 각각의 파동 상태 및 간섭 영향을 파악하기 수월해지는 효과를 기대할 수 있다. 특히 예를 들어 선행논문[3]에서 언급된 항적의 브레이드 단어인 $(\sigma_1\sigma_2)^9\sigma_4^4\sigma_5(\sigma_8^{-1}\sigma_7^{-1})^3\sigma_7\sigma_8^{-4}\sigma_3^2\sigma_6\sigma_7\sigma_8\sigma_1^{-1}\sigma_2(\sigma_1\sigma_2)^3\sigma_6^2\sigma_8^4$를 보면 $(a_1b_2)^9b_1^4b_2(c_2^{-1}c_1^{-1})^3c_1c_2^{-4}t_1^2t_2c_1c_2a_1^{-1}a_2(a_1a_2)^3t_2^2c_2^4$로 변형이 되며 이를 통해 각 파동의 상황을 빠르게 파악 가능하다. 좌우 측면파동을 a_i, c_i로 확인하고 주 파동을 b_i로 간섭을 t_i를 이용하여 바로 인식 가능하다.

이렇게 정의되는 군 S_9을 '9th 선박항적-군(9th ship wake-group)'으로 부르고 다음 군에서 확인할 수 있는 불변량을 고려해보자.

3.3 선박항적-군에서 정의되는 불변량

주어진 선박항적-군에서 각 항적의 특성을 부여하기 위한 불변량을 고려해 보자. 이 군은 braid group의 한 종류로, 불변량을 정의하기 위해 Markov move가 고려되어야 한다. B_9에서는 주어진 브레이드 단어의 conjugate 단어를 동치로 보는 경우가 있다. 다른 경우는 주어진 브레이드 단어가 $C_3^{\pm}$가 전혀 쓰이지 않은 단어와 함께 마지막 글자가 $c_3^{\pm}$로 끝나는 경우 c_3를 제거하고 B_S에 속하는 단어로 취급 가능하다. 이러한 경우를 고려하는 S_9군에 대응 가능한 다항식 불변량은 Jones polynomial이 가능하다[5]. 논문에서 주어진 브레이드 단어를 이용한 Jones polynomial의 결과는 Markov move까지 고려하여 n이 strand의 수, c가 브레이드 단어 안의 문자 수, Q는 3변수 방정식을 이용한 표현인 $j(x, y) = x^{n-c-1}Q(y, y^{-1}, 1 + x^{-2})$을 가짐을 설명하였다. 이 경우 x변수의 승수가 브레이드 단어를 구별하는 값이 되므로 이 값을 이용한 항적 분류가 가능해질 것이다.

5. 결론

이 논문에서는 선박 항적이 가지는 특수성을 이용하여 주어진 이미지를 분석한 브레이드 단어가 속할 수 있는 브레이드 군을 정의하고, 생성원을 분류하여 정의했을 때 나타나는 연결원이 어떻게 나오는지 조사하여 이를 'n^{th} 선박항적-군'으로 명명하였다. 또한 이 군에서 확인 가능한 불변량을 제시하였다. 이를 다음과 같이 정리할 수 있다.

(1) 유체 분석에 브레이드 단어가 이용되는 예시를 제시하였고, 이를 이용하여 항적의 분류를 위해서는 브레이드 군을 이용한 군 표현이 중요하며 항적의 특성을 반영한 군 표현의 필요함을 확인하였다.
(2) 항적의 세 가지 파동에 따른 브레이드 군의 생성원을 분리하여 정의하고 그 중 생성원이 8개인 S_9에 대한 군 표현을 위한 연결원 20개를 모두 구하였다. 이렇게 완성된 군 표현을 가지는 군을 선박항적-군으로 명명하였다.
(3) S_9에서 적용 가능한 이변수 불변량 Jones polynomial을 확인하였다. 특히 기준값이 될 가능성인 x변수의 승수를 이용한 기준값을 제시하였다.

참고문헌

[1] Philip L. Boyland, Hassan Aref, and Mark A. Stremler, "Topological fluid mechanics of stirring" J. Fluid Mech. (2000), vol. 403, pp. 277-304.
[2] Unsplash (https://unsplash.com/ko/%EC%82%AC%EC%A7%84/%EB%82%AE%EC%97%90-%ED%8C%8C%EB%9E%80%EC%83%89-%EB%B3%B4%ED%8A%B8%EC%9D%98-%ED%8F%89%EB%A9%B4%EB%8F%84-%EC%82%AC%EC%A7%84-PIT1djlg-bM?utm_content=creditShareLink&utm_medium=referral&utm_source=unsplash)
[3] 김세라, "파이썬과 MOY Graph를 이용한 항적 분석방법," Journal of the KNST Vol. 6 No. 3, 2023.9, pp. 235-239 (5 pages).
[4] Magnus, Wilhelm "Braid groups: A survey". Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 372. Springer. pp. 463-487. (1974) doi:10.1007/BFb0065203. ISBN 978-3-540-06845-7.
[5] John Franks and R. F. Williams "Braids and the Jones polynomial", Transcactions of the American Mathematical Society, Volume 303, Number 1, September (1987).