

Received: 2024/06/19  
Revised: 2024/06/30  
Accepted: 2024/11/08  
Published: 2024/12/31

**\*Corresponding Author:**

**Chang Ik Lee**

Industrial Mathematics Center on Big data, Pusan National University  
2, Busandaehak-ro 63beon-gil, Geumjeong-gu, Busan 46241, Republic of Korea  
Tel: +82-51-510-3120  
E-mail: cilee@pusan.ac.kr

**Abstract**

본 논문에서는  $n$ 개의 꼬인 선으로 이루어진 브레이드를 이용하여, 유체역학에서 정적인 움직임을 제외하고 최소 확장값을 가지는 브레이드 형태를 주 파동 및 측면 파동으로 가지는 경우를 논의하고 있다. 또한 해당 브레이드의 확장값 계산 및 이 형태가 가지는 이점을 분석하고자 한다. 또한 이 항적을 이용한 특수 항적군에 대하여 정의하고자 한다.

In this paper, we aim to discuss the ship-wake form as an optimal braid configuration with the minimum dilatation in fluid dynamics and the calculation of dilatations for the pseudo-Anosov homeomorphisms. We consider the advantages of this configuration in order to analyze ship-wake image. Additionally, we investigate to define a special ship-wake group utilizing these braid form.

**Keywords**

함선의 항적(Ship Wake),  
브레이드 군(Braid Group),  
황금비 확장값(Dilatation with Golden Ratio),  
군표현(Group Presentation)

**Acknowledgement**

이 논문은 2024년 해군사관학교 해양연구소 학술연구과제(항적으로 정의된 브레이드 부분군에 대한 연구) 연구비의 지원으로 수행된 연구임

# 특정 확장값을 가지는 항적으로 정의된 브레이드 부분군에 대한 연구

## The Research on the Braid Subgroup Defined by Ship-wakes with the Special Dilatation

김세라<sup>1</sup>, 이창익<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>해군사관학교 기초과학과 부교수

<sup>2</sup>부산대학교 수리과학연구소 연구원

Sera Kim<sup>1</sup>, Chang Ik Lee<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Associate Professor, Dept. of Natural Science, Republic of Korea Naval Academy

<sup>2</sup>Researcher, Industrial Mathematics Center on Big Data, Pusan National University

### 1. 서론

현대 유체역학은 유체 내에서의 혼합 방법의 효율성 계산과 그 성능을 향상시키기 위한 최적의 방법에 대한 방향으로 활발히 연구가 진행되고 있다. 이 혼합 효율성을 증가시키는 연구들 중 위상 수학의 매듭 이론이 적용된 유체역학 분야가 존재한다. 2000년 Boyland P. L. 등의 연구[3]를 시작으로, 매듭 이론은 시간의 흐름에 따라 유체 내를 휘젓는 막대의 움직임을 표현하는 데 사용되고 있다. 특히, 혼합 장치(교반기)에서의 움직임을 다양한 매듭 형태 중 브레이드(braid) 형태를 이용하여 설명하고 분석하는 것이 최근 연구의 주요 관심사 중 하나라고 볼 수 있다. 여기서 ‘브레이드’는  $n$ 개의 선으로 만들어진 꼬임을 의미하며, 이 꼬임은 Fig. 1과 같이 교반기 내의 젓는 막대가 시간의 흐름에 따라 움직인 궤적을 표현할 수 있다.

Fig. 1에 나타난 바와 같이 특정 유체속의 4개의 막대의 위치를 시간이 수직축인 삼차원 공간에 색깔 점(파랑/빨강/노랑/민트)으로 표시하면, 시간의 흐름(Fig. 1에서 시간은 아래에서 위로 올라가는 방향)에 따라 ‘막대의 위치 변화(자취) 그래프’(Fig. 1의 색상이 있는 끈들)가 생성된다. 고체인 막대는 움직이면서 서로 합쳐질 수 없으므로 이 막대의 자취 선들은 결코 서로 겹칠 수 없다. 결과적으로 이렇게 생성된 그래프는 서로 겹치지 않는 여러 가닥의 꼬인 끈

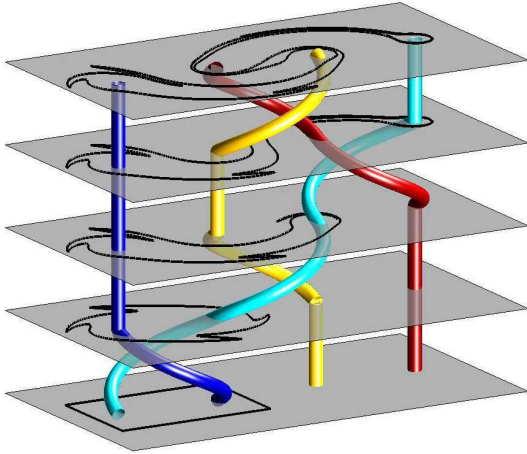


Fig. 1. Braid representing the motion of stirring rods[5]

브레이드 형태를 나타낸다. 이 브레이드는 대상 유체 흐름의 특성에 대한 중요한 정보를 제공한다. 예를 들어, 막대가 움직임에 따라 막대 주변의 수면에는 파동이 일렁이게 된다. Fig. 1의 5개 회색 평면(각 특정 시간대) 위에 그려진 검은색 띠가 바로 이를 표현한 것이다. 이는 주어진 막대의 움직임으로 나타난 것이며 또한 이 움직임으로 인한 유체 표면의 움직임을 표현하는 정보로도 볼 수 있다.

이 복잡성을 분류하기 위하여 Jean-Lus Thiffeault는 유체의 움직임을 위에서 바라본 형태로 고정하여 관찰하는 방식을 제안하였다[4]. 바로 앞에서 살펴본 것처럼 유체의 표면을 2차원 평면으로 막대의 움직임을 점의 움직임으로 놓고 관찰하는 방법이다. 이 방식을 기반으로 Thiffeault 및 2인은 2006년 연구에서 2차원 평면 위의 규칙적인 움직임과 그에 따른 움직임의 궤적인 브레이드를 통하여 위상 엔트로피 값과 해당 움직임에 대한 확산값의 계산 공식을 정의한다[2]. 예를 들어 Fig. 1에 표현된 브레이드의 경우 양의 위상 엔트로피를 가지고 있다. 이 위상 엔트로피와 확산값을 통해 주어진 교반기 내부의 막대의 움직임들 중 유체에 대한 확산 정도를 최소화할 수 있는 방법을 제시할 수 있다. 바로 3개의 선으로 이루어진 브레이드 움직임들 중 최소의 확산값은 황금비와 일치할 때이며, 이를  $n$ 개의 선을 가지는 일반적인 경우로 확장하면 확산값이 은비율인 경우임을 Boyland, P. L. 등이 증명하였다[3]. 또한 Daniel C. H.는 황금비와 은비율을 확산값으로 가지는 브레이드 형태를 참고문헌 [5]에서 제시한다.

본 논문에서는 [5]에서 주어진 브레이드 형태를 응

용하여 확산값을 황금비로 하는 항적의 브레이드 군을 고려하고자 한다. 최소의 확산값을 가지는 브레이드 형태가 항적이 될 경우 해수면과 저항이 가장 적은 파동의 형태를 따를 것이며, 이를 위해 황금비를 확산도로 가지는 브레이드 군을 특수 항적군으로 가질 때의 특성을 여기서 살펴보고자 한다. 따라서 이 연구는 해수면과 저항이 최소한으로 남는 항적 형태가 무엇인지 확인할 수 있다면 군함 및 수상정 등에 이를 이용하여 최소한의 저항으로 이동 가능한 함선 구축에도 적용 가능할 것이라 기대한다.

## 2. 최신 연구동향분석

### 2.1 유체 움직임에 대한 위상학적 분석

[4]에서 표현한 대로 매 순간 유체의 표면과 유체를 젖는 막대들의 위치는 각 평면 위의 점들로 표현 가능할 것이다. 그리고 시간의 흐름에 따라 유체를 휘젓는 점들의 움직임을 공간 속에서 연속적이면서 반복적인 움직임으로 가정하자. 이 가정은 선박의 프로펠러의 움직임과 같이 일정한 움직임을 요구하는 운동에 적용되기 좋을 것이다. 이 경우 각 점들의 위치는 어느 순간 초기 위치로 돌아오게 되며 시공간 속에서 해당 주기 동안 만든 점들이 움직인 궤적은 ‘퓨어 브레이드’(각 시작점의 순서와 끝점의 순서가 일치하는 브레이드)라는 형태를 가지게 된다. 퓨어 브레이드는 미분 가능한 동형사상인  $f: R_n \rightarrow R_n$  ( $R_n$ 은  $n$ 개의 점들의 모임)의 함수로서 항상 표현 가능하며, 실제로 이 미분동형사상은 해당 유체의 Stokes 방정식이나 관성이 중요한 경우엔 Navier-Stokes 방정식과 같은 유체 방정식을 풀어서 얻을 수 있다.

이 함수  $f$ 를 위상학적 동형에 따라 분류하는 방법을 생각해 보자. 막대의 개수가  $n = 1, 2$ 인 경우 막대가 어떻게 움직이든지 모든 유체 운동이 정적으로 움직임이 없는 형태와 항상 위상적으로 동형이 된다. 여기서 Boyland 등은  $n \geq 3$ 인 경우 정적인 형태와 동형적이지 않은 유체 운동이 항상 존재함을 증명한다[3]. 실제로  $n \geq 3$ 마다 정적인 것과 동형적이지 않은 미분동형사상  $f$ 의 그래프는 항상 퓨어 브레이드의 한 형태와 대응하며, 이는 미분동형사상의 동형의 동치류들이 브레이드의 동형 동치류와 정확히 대응하게 됨을 의미한다.

다시 말하자면, 미분동형사상의 동형 동치류는 해당하는 퓨어 브레이드의 동형 동치류에 대응 가능하다. 예를 들어 Fig. 1에서 보인 색깔 선들과 같은 브레이드 형태를 가지는 두 개의 미분동형사상 이미지가 있다고 가정하자. 이 때 한 브레이드에서 끝점들을 고정시키고 끊김 없는 유한(有限) 번의 연속적인 움직임으로 다른 브레이드 형태로 변화하는 것이 가능하다면, 이 미분동형사상들은 위상적으로 같다고 볼 수 있다. 즉, 이 유체의 움직임들은 Birman[9]이 제시하는 브레이드 군의 원소로서 대응하게 된다. 즉, 각 브레이드 단어(브레이드의 동형 동치류를 표현하는 단어)들이  $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$  및  $|i-j| > 1$  일 때  $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ 를 허용하는 두 가지 연결자로 인하여 변경 가능하면 유체의 미분동형사상들이 위상적 동형임을 설명할 수 있다. 즉, 교반기 막대의 개수가  $n$ 개일 때, 브레이드 군  $B_n$  안의 원소들로 위상적 동형이 되는 교반기 막대들의 움직임을 모두 설명할 수 있게 된다.

2.2 유체 움직임에 대한 미분기하학적 분석

2차원 다양체를 분류하는 Thurston–Nielsen 분류이론[1,7]을 이용하여 미분동형사상  $f$ 를 분석하기도 한다. 이것은  $f$ 가 반복적인 미분동형사상이거나, 분리된 유한개의 교차하지 않는 닫힌 고리들, 또는 pseudo-Anosov 함수인 미분동형사상 중에 하나와 항상 동형이 된다는 이론이며, 미분동형사상  $f$ 가 항상  $f'$ 와 동형이라는 사실과 해당 막대의 움직임이 정적인 움직임이 아닌 경우를 가정하면  $f'$ 이 pseudo-Anosov 함수인 경우로만 한정시킬 수 있다. 이 경우 주어진 함수는 2차원 면 위 영역의 단위길이를 축소 ( $\times \frac{1}{\lambda}$ ) 또는 확장 ( $\times \lambda$ )시키는 함수가 된다. ( $\lambda > 1$ ) 그 때  $\lambda$ 를 확장값이라 부르고  $\log \lambda$ 를 위상적 엔트로피라 부른다.

주어진 함수가 유한개의 특이점을 가지는 함수라면 대응 가능한 pseudo-Anosov 함수를 항상 가지므로, 각 미분동형사상에 대응하는 브레이드마다 확장값들을 정의할 수 있다. 예를 들어 교반기 내의 막대 4개를 퓨어 브레이드  $\sigma_1\sigma_2^1\sigma_3\sigma_2^1$ 에 따라 움직이는 경우 Fig. 2와 같이 시간의 흐름에 따른 유체 표면의 변화를 만들어 내며, 이 경우 확장값  $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ (대략

6.8)를 가진다. 하지만 퓨어 브레이드  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2$ 에 따라 움직일 경우에는 2를 가지게 된다. 즉, 첫 번째 퓨어 브레이드  $\sigma_1\sigma_2^1\sigma_3\sigma_2^1$ 의 경우가 훨씬 빠르게 유체를 뒤섞는다고 볼 수 있다.

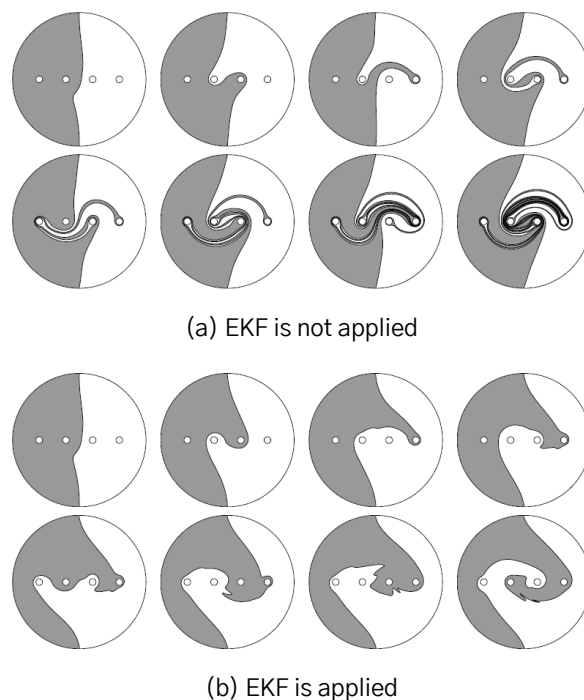


Fig. 2. In a mixing device, fluid patterns obtained by motions corresponding to  $\sigma_1\sigma_2^1\sigma_3\sigma_2^1$  and  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2$ [5]

3. 황금비 확장값을 가지는 브레이드 형태에 대한 특수 항적군

참고문헌 [3]에서 2차원 곡면의 곡면중수를  $g = 1, \dots, 8$ 까지 고려할 때, 이 2차원 곡면들 사이 pseudo-Anosov 위상동형사상의 최소 확장값은  $X^{2g} - X^{g+1} - X^g - X^{g-1} + 1 = 0$  방정식의 가장 큰 해와 같다는 사실이 밝혀져 있다. 이는 (황금률) <sup>$\frac{2}{g}$</sup> 에 근사한 값이며,  $g = 1$ 인 상황에서는 정확히 (황금률)<sup>2</sup>인 값에 대응된다. 이에 Boyland 등은 이 값을 가지는 브레이드를 소개하였다. 바로  $n = 3$ 에서 황금비의 연분수인  $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$  형태와 관련된  $(\sigma_1\sigma_2^1)^k$  형태의 브레이드들의 확장값을 정확히 계산해 보면  $\frac{3+2\sqrt{5}}{2}$ (황금비 값  $\frac{(1+\sqrt{1^2+4})}{2}$ 의 제곱수)에 해당한다. 이를

일반화하면,  $(\sigma_1^m \sigma_2^m)^k$ 의 확장값은  $\frac{(m + \sqrt{m^2 + 4})}{2}$ 로

황금비의 일반화라고 불리는 은비율의 값을 가진다. 하지만 은비율에서  $m > 1$ 인 자연수의 경우 황금비보다 큰 값이 되므로, 이 논문에서는 황금비를 확장값으로 가지는 브레이드들의 부분집합을 정의하도록 하겠다.

우선 황금비가 확장값이 되는 브레이드를 가지고 정의되는 막대의 움직임이 배의 항적과는 어떤 관련성이 있는지 항적의 입장으로 해석하면 다음과 같다. 앞서 살펴본 시공간 3차원 속에서 정의되는 브레이드 그래프의 시간축을 수평 방향으로 눕힌 상태를 고려하면 시간의 흐름에 따라 프로펠러가 수면을 치면서 지나가는 항적 그래프로 해석할 수 있다. 이 경우 확장값은 수면과 프로펠러 사이의 저항값으로 변할 것이다. 따라서 수면과의 저항값이 가장 작은 항적 브레이드를 모은 부분군을 정의할 수 있게 된다. 이를 위해 정적인 상태와 동형이 아니면서 최소의 확장값인 황금비를 가지는 브레이드인  $(\sigma_1 \sigma_2^{-1})^k$ 를 생성원으로 두는 부분집합을 떠올려 보자. 만약 이 집합에 항적 브레이드들이 가지는 조건인 연결원이 어떤 형태로 바뀌게 되는지를 추가로 정의할 수 있다면, 최소 저항값을 가지는 항적 브레이드들의 부분군을 정의할 수 있을 것이다.

저자의 이전 논문[7]에서 선박항적의 특수군이  $B_9$ 의 부분군으로 표현되며 각 측면 파동과 주파동이 각  $B_3$ 로 구성되어 있으므로 이 군을 기준으로 할 것이다. 이미 위에서 언급된 황금비를 확장값으로 가지는  $(\sigma_1 \sigma_2^{-1})^k$  또는  $(\sigma_1^m \sigma_2^{-m})^k$ 을 생성원으로 가지는 부분군으로 정의하려면 해당 생성원을 대상으로 하는 연결원이 어떻게 정의되는지 확인해 보자. 일반적인 선박항적을 표현하기 위한 군의 연결원은 식 (1)과 같다.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \quad (\sigma = a, b, c) \tag{1a}$$

$$a_2 t_1 a_2 = t_1 a_2 t_1 \tag{1b}$$

$$t_1 b_1 t_1 = b_1 t_1 b_1 \tag{1c}$$

$$b_2 t_2 b_2 = t_2 b_2 t_2 \tag{1d}$$

$$c_1 t_2 c_1 = t_2 c_1 t_2 \tag{1e}$$

$$t_1 t_2 = t_2 t_1 \tag{1f}$$

$$a_1 t_1 = t_1 a_1 \tag{1g}$$

$$b_2 t_1 = t_1 b_2 \tag{1h}$$

$$c_i t_1 = t_1 c_i \quad (i = 1, 2) \tag{1i}$$

$$a_i t_2 = t_2 a_i \quad (i = 1, 2) \tag{1j}$$

$$b_1 t_2 = t_2 b_1 \tag{1k}$$

$$c_2 t_2 = t_2 c_2 \tag{1l}$$

$$a_i b_j = b_j a_i \quad (i, j = 1, 2) \tag{1m}$$

$$c_i b_j = b_j c_i \quad (i, j = 1, 2) \tag{1n}$$

여기서,  $a_1, a_2$ 는 외편 측면 파동의 생성원,  $b_1, b_2$ 는 주파동의 생성원이며  $c_1, c_2$ 는 오른편 측면 파동의 생성원,  $t_1, t_2$ 는 측면과 주파동 사이 간섭파동의 생성원이다.

이 연결원들 중  $(\sigma_1 \sigma_2^{-1})^k$  형태만을 가지는 브레이드, 즉 황금비율을 확장값으로 가지는 브레이드들의 부분군을 정의하기 위한 해당 연결원을 계산하였다. 이를 위해 (1) 기존의  $B_9$  부분군에서 측면파동, 주파동, 간섭이 일어나는 부분을 각  $B_3$ 군으로 세분화하였다. (2) 그 후 황금비를 가지는 생성원으로 한정시키기 위하여 왼편 측면 파동의 생성원은  $a_1 a_2^{-1}, a_1^{-1} a_2$ 로 한정시켰으며, 주 파동의 경우  $b_1 b_2^{-1}, b_1^{-1} b_2$ 로, 오른편 측면파동 역시  $c_1 c_2^{-1}, c_1^{-1} c_2$ 인 생성원으로 구성하였다. (3) 이렇게 정의된 생성원을 대상으로 연결원을 식 (2)와 같이 재정의할 수 있었다.

$$\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 = \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \quad (\sigma = a, b, c, t) \tag{2a}$$

$$a_1 t_1 = t_1 a_1 \tag{2b}$$

$$t_1 b_2^{-1} = b_2^{-1} t_1 \tag{2c}$$

$$a_2^{-1} t_2 = t_2 a_2^{-1} \tag{2d}$$

$$t_2 c_2^{-1} = c_2^{-1} t_2 \tag{2e}$$

$$\sigma_i \delta_j = \delta_j \sigma_i \quad (\sigma \neq \delta, \sigma \in \{a, b, c\}, \delta \in \{a, b, c\}) \tag{2f}$$

(4) 최종적으로 이 군표현을 가지는  $B_9$  부분군을 황금비 확장값을 가지는 pseudo-Anosov 특수 선박항적군  $pS_9$ 으로 이름 붙이고, 이 군의 원소를 항적 형태로 가지는 경우 해수면과의 마찰값이 가장 적은 황금비  $\frac{3 + 2\sqrt{5}}{2}$ 의 항적을 가지게 된다.

#### 4. 결론

항적의 브레이드 군을 pseudo-Anosov 특수 선박



항적군  $pS_9$ 으로 두었을 때, 해당 항적을 가지는 선박은 시계방향과 반시계방향이 한 칸씩 어긋난 형태  $(\sigma_1\sigma_2^{-1})^k$ 의 항적을 가지게 된다. 이를 선박에 적용하면 실질적으로 프로펠러의 회전은  $\infty$  모양으로 양 방향으로 휘돌아감는 형태가 되어야 한다. 이런 형태의 모터가 없다면, 차선택으로 위치가 이웃한 형태의 프로펠러가 각자 반대 방향으로 돌아가는 방식으로 적용 가능할 것이라 예상한다. 그 궤적은 Fig. 3와 같은 형태일 것이며, 이 궤적에 대한 연구[8]를 이용하면 해당 항적에 대한 추가 연구가 가능할 것으로 기대한다.



**Fig. 3.** The pattern related to the motion of stirring rods whose dilatation as the golden ratio[8]

Pseudo-Anosov 특수 선박항적군  $pS_9$ 의 경우, 이웃한 문자들의 승수 부호가 플러스/마이너스가 번갈아 바뀌게 되므로 측면 파동 및 주 파동의 구별이 더욱 쉬워진다. 이를 이용하면 해당 항적의 간섭 정도의 파악이 일반적인 항적보다 훨씬 쉬워질 것이라 예상한다.

후속연구로 황금비의 일반형인 은비율  $m$ 과 관련한 pseudo-Anosov 특수 선박 항적군  $pmS_9$ 로 두게 되면 선박 항적의 형태가 어떻게 되는지 관측 중이며, 황금비와 관련한 pseudo-Anosov 특수 선박 항적군  $pS_9$ 과의 차이점을 비교 분석하여 더 자세한 결과를 도출할 수 있으리라 판단한다.

추가로 유체 표면에서의 움직임의 영향력을 계산하는 법을 큰 단위의 움직임, 예를 들면 해류의 경우로 확장하여 고려할 수 있다면 단순히 항적 외에도 더 넓은 영역에서 (배의 항로 등의 계산법 등) 이용할 수 있을 것으로 기대한다.

## 참고문헌

- [1] Fathi, A., Laudenbach, F., and Poenaru, V. Travaux, de Thurston sur les surfaces. Asterisque (1979) Vol. 66-67, pp. 1-284.
- [2] Gouillart, E., Finn, M. D., and Jean-Lus Thiffeault, Topological Mixing with Ghost Rods, Phys. Rev. E (2006) Vol. 73, 036311.
- [3] Boyland, P. L., Aref, H., and Stremler, M. A. Topological Fluid Mechanics of Stirring, J. Fluid Mech. (2000) Vol. 403, pp. 277-304.
- [4] Jean-Lus Thiffeault, Measuring Topological Chaos, Phys. Rev. Lett. (2005) Vol. 94, 084502.
- [5] Jean-Lus Thiffeault and Matthew D. Finn, Topology, Braids and Mixing in Fluids, Philosophical Trans. of the Royal Society a Mathematical, Physical and Engineering Sciences (2006) Vol. 364, No. 1849.
- [6] Thurston, W. On the Geometry and Dynamics of Diffeomorphisms of Surfaces. Bull. Am. Math. Soc. (1988) Vol. 19, pp. 417-431.
- [7] 김세라, 선박항적이 가지는 특수 군에 대한 연구. Journal of KNST (2023) Vol. 6, No. 4, pp. 376-379.
- [8] Marta Aguilera, On Dilatation Factors of Braids on Three Strands. Journal of Knot Theory and its Ramifications (2015) Vol. 24, No. 4, 1550019.
- [9] Birman, J. S. Braids, Links, and Mapping Class Groups. Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ: Princeton University Press (1975).